Ad-Soyad: ═══ CEVAP ANAHTARI ═══ **02.01.2019**

Numara:

İmza:

SOYUT MATEMATİK I FİNAL SORULARI

1) a) p, q, r üç önerme olsun.

$$(p \wedge r') \Leftrightarrow [p \Rightarrow (r \Rightarrow q)]$$

önermesi bir totoloji midir? Gösteriniz.

b) $f: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere $C \subseteq Y$ için

$$f^{-1}(Y \backslash C) = X \backslash f^{-1}(C)$$

olduğunu gösteriniz.

2) $\forall\ (a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ için $(a,b)o(c,d) = (a+c, bd)$ biçiminde tanımlanan o ikili işleminin özelliklerini inceleyiniz.

3) $f: A \longrightarrow B$ örten bir fonksiyon ise $\{f^{-1}(b)\}_{b \in B}$ ailesinin A kümesinin bir ayrışımı olduğunu gösteriniz.

4) Sonlu kümelerin oluşturduğu bir aile $\mathcal{P}$ olsun. $\forall\ A, B \in \mathcal{P}$ için

$$A \sim B \Leftrightarrow \exists\ f: A \longrightarrow B \ni f; \text{ birebir ve örten fonksiyon}$$

biçiminde tanımlanan $\sim$ bir denklik bağıntısı mıdır? Gösteriniz. Eğer $\sim$ bir denklik bağıntısı ise $\mathcal{P}$ ailesi $X = \{1,2,3,4\}$ kümesinin kuvvet kümesi $\mathcal{P} = P(X)$ olarak seçilirse $D = \{1,2\} \in P(X)$ elemanının denklik sınıfını bulunuz.

5) $A = \{(1,2), (1,5), (2,6), (3,5), (4,10)\}$ kümesi üzerinde $\forall\ (x,y), (z,t) \in A$ için

$$(x,y)\beta(z,t) \Leftrightarrow x | z \text{ ve } y \leq t$$

biçiminde β sıralama bağıntısı tanımlanıyor. A kümesinin büyük ve küçük elemanlarını varsa en büyük ve en küçük elemanlarını bulunuz. A kümesinin eküs ve ebas için ne söyleyebilirsiniz? Açıklayınız.

BAŞARILAR

1) a)

p	q	r	r'	$p\wedge r'$	$r\Rightarrow q$	$p\Rightarrow(r\Rightarrow q)$	$(p\wedge r')\Leftrightarrow[p\Rightarrow(r\Rightarrow q)]$
1	1	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	1	1	0

olduğundan totoloji değildir.

b)

$$x\in X\setminus f^{-1}(C) \Longleftrightarrow x\in X \text{ ve } x\notin f^{-1}(C)$$
$$\Longleftrightarrow x\in X \text{ ve } f(x)\notin C$$
$$\Longleftrightarrow f(x)\in Y \text{ ve } f(x)\notin C$$
$$\Longleftrightarrow f(x)\in Y\setminus C$$
$$\Longleftrightarrow x\in f^{-1}(Y\setminus C)$$

2) i) Değişme özelliği: $\forall (a,b),(c,d)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ için

$$(a,b)\circ(c,d) = (c,d)\circ(a,b) \;?$$

$$(a,b)\circ(c,d) = (a+c,\ bd) \qquad (\mathbb{Z}\text{ de } + \text{ ve } \cdot\text{'nın değişme öz.})$$
$$= (c+a,\ db)$$
$$= (c,d)\circ(a,b)$$

$\therefore$ $\circ$ işleminin değişme özelliği vardır.

ii) Birleşme özelliği: $\forall (a,b),(c,d),(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ için

$$[(a,b)\circ(c,d)]\circ(m,n) = (a,b)\circ[(c,d)\circ(m,n)] \;?$$

$$[(a,b)\circ(c,d)]\circ(m,n) = (a+c,\ bd)\circ(m,n)$$
$$= ((a+c)+m,\ (bd).n)$$
$$= (a+(c+m),\ b(dn))$$
$$= (a,b)\circ(c+m,\ dn)$$
$$= (a,b)\circ[(c,d)\circ(m,n)]$$

$\therefore$ $\circ$ işleminin birleşme özelliği vardır.

iii) birim (etkisiz) eleman özelliği :

$\exists (e_1,e_2)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \ni \forall (a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ için

$$(a,b)\circ(e_1,e_2) = (e_1,e_2)\circ(a,b) = (a,b) \ ?$$

$$(a,b)\circ(e_1,e_2) = (a,b) \iff (a+e_1,\ be_2) = (a,b)$$
$$\iff a+e_1 = a,\quad be_2 = b$$
$$\iff \begin{cases} e_1 = 0 & (a\in\mathbb{Z},\ \mathbb{Z} \text{ de } + \text{'nın birim elemanı } 0\text{'dır}) \\ e_2 = 1 & (b\in\mathbb{Z}^*,\ \mathbb{Z}^* \text{ da } \cdot \text{'nın birim elemanı } 1\text{'dir}) \end{cases}$$
$$\iff (e_1,e_2) = (0,1)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$$

$\therefore$ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$'in $\circ$ işlemine göre birim elemanı $(0,1)$ dir.

iv) Ters eleman özelliği :

$\forall (a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ için $\exists (u,v)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \ni$

$$(a,b)\circ(u,v) = (u,v)\circ(a,b) = (0,1) \ ?$$

$(1,2)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ için

$$(1,2)\circ(u,v) = (0,1) \iff (1+u,\ 2v) = (0,1)$$

$\Longleftrightarrow \quad 1+u=0, \quad 2v=1$

$1\in\mathbb{Z}$ için $\mathbb{Z}$ de $+$'nın ters eleman özelliğinden

$u=-1\in\mathbb{Z}$ dir.

$2\in\mathbb{Z}^*$ için $\mathbb{Z}^*$ da $\cdot$'nın ters eleman özelliği yoktur.

$\therefore$ $(1,2)$ elemanının $\circ$ işlemine göre tersi

olmadığından $\circ$ işleminin ters eleman özelliği yoktur.

3) $\forall b\in B$ için $f^{-1}(b)=f^{-1}(\{b\})$

$$=\{a\in A : f(a)=b\}$$

i) $\forall b\in B$ için $f^{-1}(b)\neq\emptyset$ mı?

f örten olduğundan $\forall b\in B$ için $\exists\, x\in A \ni f(x)=b$

$$\Rightarrow x\in f^{-1}(b)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(b)\neq\emptyset$$

ii) $\forall b_1,b_2\in B$, $b_1\neq b_2$ için $f^{-1}(b_1)\cap f^{-1}(b_2)=\emptyset$ mı?

$\forall b_1,b_2\in B$, $b_1\neq b_2$ için $f^{-1}(b_1)\cap f^{-1}(b_2)\neq\emptyset$ olsun.

$$f^{-1}(b_1)\cap f^{-1}(b_2)\neq\emptyset \Rightarrow \exists\, a\in A \ni a\in f^{-1}(b_1)\cap f^{-1}(b_2)$$

$$\Rightarrow a\in f^{-1}(b_1) \text{ ve } a\in f^{-1}(b_2)$$

$$\Rightarrow f(a)=b_1,\ f(a)=b_2$$

$$\Rightarrow b_1=b_2 \quad (\text{Çelişki, } b_1\neq b_2 \text{ idi})$$

$$\therefore f^{-1}(b_1)\cap f^{-1}(b_2)=\emptyset$$

iii) $\bigcup_{b\in B} f^{-1}(b)=A$?

$\forall b \in B$ için $f^{-1}(b) \subseteq A \Rightarrow \bigcup_{b \in B} f^{-1}(b) \subseteq A$ --- ①

$\forall a \in A$ alalım $\Rightarrow \exists!\, c \in B \ni f(a) = c$

$\Rightarrow a \in f^{-1}(c)$

⊛ $\boxed{f^{-1}(c) \subseteq \bigcup_{b \in B} f^{-1}(b)}$

$\Rightarrow a \in \bigcup_{b \in B} f^{-1}(b)$

⊛

$A \subseteq \bigcup_{b \in B} f^{-1}(b)$ --- ②

① ve ② den $\bigcup_{b \in B} f^{-1}(b) = A$ dır.

$\therefore \{f^{-1}(b)\}_{b \in B}$ ailesi A kümesinin ayrışımıdır

4) $\sim$ denklik bağıntısı mıdır?

- yansıma özelliği:

$\forall A \in \mathcal{S}$ için $A \sim A$?

$A \sim A \overset{?}{\Longleftrightarrow} \exists f : A \to A \ni f$ 1-1, örten

$f : A \to A$ fonksiyonu özdeşlik fonksiyon olduğundan 1-1 ve örtendir.

$\therefore$ yansıma özelliği vardır

- simetri özelliği:

$\forall A, B \in \mathcal{S}$ için $A \sim B \Rightarrow B \sim A$?

$A \sim B \Rightarrow \exists f : A \to B \ni f$ 1-1, örten

$B \sim A \overset{?}{\Longleftrightarrow} \exists g : B \to A \ni g$ 1-1, örten mi?

$g = f^{-1} ; B \to A$ 1-1, örten mi?

- $\forall x, y \in B$ için $f^{-1}(x) = f^{-1}(y) \Rightarrow x = y$ mi?

$f^{-1}(x) = f^{-1}(y) = a \Rightarrow f(a) = x,\ f(a) = y$

$\Rightarrow x = y$

$\therefore f^{-1}$ 1-1 dir.

- f fonksiyonu 1-1 ve örten olduğundan,

$\forall x \in A$ için $\exists y \in B \ni f(x) = y$. Buna göre,

$\forall x \in A \ \exists y \in B \ni f^{-1}(y) = x$ dir.

$\therefore f^{-1}$ fonksiyonu örtendir.

$\therefore B \sim A$

$\therefore$ simetri özelliği vardır

- Geçişme özelliği:

$\forall A, B, C \in \mathcal{P}$ için $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$?

$A \sim B \Rightarrow \exists f : A \to B \ni f$ 1-1, örten

$B \sim C \Rightarrow \exists g : B \to C \ni g$ 1-1, örten

$A \sim C \overset{?}{\Longleftrightarrow} \exists h : A \to C \ni h$ 1-1, örten mi ?

$h = g \circ f : A \to C$ 1-1, örten mi ?

- $\forall x, y \in A$ için $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow x = y$ mi ?

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \underset{g\ 1\text{-}1}{\Longrightarrow} g(f(x)) = g(f(y))$$
$$\Longrightarrow f(x) = f(y)$$
$$\underset{f\ 1\text{-}1}{\Longrightarrow} x = y$$

$\therefore g \circ f$ 1-1 dir.

- f örten $\Rightarrow \forall b \in B$ için $\exists a \in A \ni f(a) = b$

g örten $\Rightarrow \forall c \in C$ için $\exists b \in B \ni g(b) = c$

$\forall c \in C$ için $\exists a \in A \ni$

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c$$

olduğundan $g \circ f$ örtendir.

$\therefore g \circ f$, 1-1 ve örtendir.

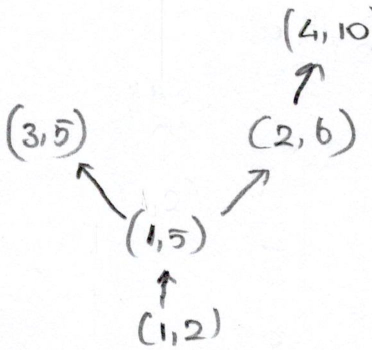
$\therefore$ Geçişme özelliği vardır.

∴ $\sim$ bir denklik bağıntısıdır.

$$\bar{D} = \{C \in P(X) : D \sim C\}$$
$$= \{C \in P(X) : \exists f : D \longrightarrow C \ni f ; \text{1-1, örten}\}$$
$$= \{C \in P(X) : C \subseteq X, |C| = 2\}$$
$$= \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$$

5) $A = \{(1,2), (1,5), (2,6), (3,5), (4,10)\}$

(A, β) sıralı küme β bağıntısına göre A'nın birbiriyle bağıntılı olan elemanları aşağıdaki çizelgedeki gibi de gösterilebilir



Buna göre;

- (3,5), (4,10) A nın büyük elemanıdır.
- $3 \nmid 4,\ 5 \leq 10 \Rightarrow (3,5) \not\beta\ (4,10)$; $4 \nmid 3,\ 10 \nleq 5 \Rightarrow (4,10) \not\beta\ (3,5)$ $\Rightarrow$ A nın en büyük elemanı yoktur.
- (1,2), A nın en küçük (küçük) elemanıdır.
- (1,2), A nın en büyük alt sınırıdır.
- ekok(3,4) = 12 olduğundan A nın en küçük üst sınırı (12,10) dur.